

فرادرس

فراتر از یک کلاس درس
www.faradars.org

آموزش الکترومغناطیس ۱ (Electromagnetics)

درس چهارم: دی‌الکتریک‌ها و میدان الکتریکی در حضور ماده

نام مدرس:

متین هنردوست

دکترای فیزیک

میدان‌های الکتریکی در ماده

رسانا (فصل قبل): دارای بار آزاد
عایق یا دی‌الکتریک (دارای بار مقید): در
این فصل ابتدا اثر میدان خارجی E را روی
یک اتم بررسی می‌کنیم

مواد به لحاظ پاسخی که به اعمال
میدان الکتریکی رویشان می‌دهد، به
دو دسته عمده تقسیم می‌شوند

اتم دارای قطبش داخلی (چرخش)

اتم بدون قطبش داخلی (کشش)

الف) اتم یا مولکول خنثی

با اعمال میدان الکتریکی خارجی، بارهای مقید به هسته اتم ها کمی جابه جا می شوند و ماده دارای گشتاور دو قطبی القایی خواهد شد. البته بسته به خصوصیت ماده ممکن است اعمال میدان الکتریکی در جهت های مختلف تأثیرهای متفاوتی به لحاظ ایجاد دوقطبی القایی داشته باشد.

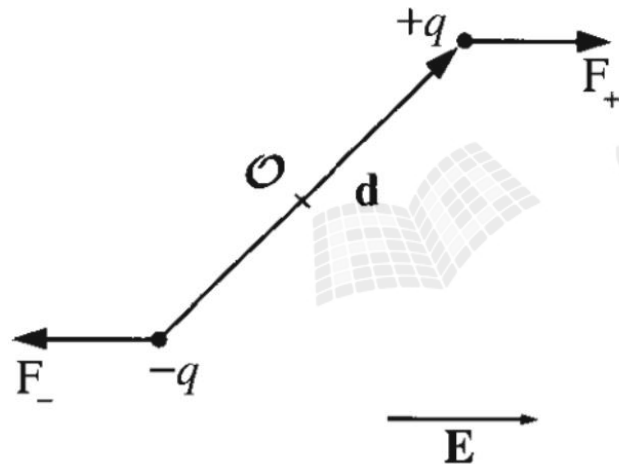
در حالت کلی رابطه بین گشتاور دوقطبی القایی و میدان خارجی اعمال شده، تناسبی با

$$p_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} E_j$$

ضریب تانسوری است که **قطبش پذیری اتمی** نامیده می شود:

ب) اتم یا مولکول قطبیده

در حالتی که میدان الکتریکی **یکنواخت** خارجی روی مولکول قطبیده با گشتاور دوقطبی اعمال شود به بار مثبت و بار منفی در دو سر دوقطبی نیروی زیر وارد می شود:



$$\vec{F}_+ = q\vec{E} \quad \text{نیروی وارد بر بار مثبت :}$$

$$\vec{F}_- = -q\vec{E} \quad \text{نیروی وارد بر بار منفی :}$$

این نیروها سبب اعمال گشتاور نیروی زیر می شود:

$$\begin{aligned}\vec{N} &= (\vec{r}_+ \times \vec{F}_+) + (\vec{r}_- \times \vec{F}_-) = \\ &= \left[\left(\vec{d}/2 \right) \times (q\vec{E}) \right] + \left[\left(-\vec{d}/2 \right) \times (-q\vec{E}) \right] = q\vec{d} \times \vec{E}\end{aligned}$$



$$\vec{N} = \vec{P} \times \vec{E}$$

گشتاور نیروی وارد شده بر یک دوقطبی در مجاورت میدان الکتریکی یکنواخت؛ این گشتاور باعث می شود دوقطبی در جهت E بچرخد.

اگر میدان خارجی یکنواخت نباشد نیروی خالص وارد شده به دوقطبی به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q \underbrace{\Delta \vec{E}}$$

$$dE_x = \vec{\nabla} E_x \cdot \vec{d}$$

تفاضل برداری میدان الکتریکی در دو سر دوقطبی

$$\Delta E_x \equiv (\vec{\nabla} E_x) \cdot \vec{d}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta E_x = \vec{\nabla} E_x \cdot \vec{d} \\ \Delta E_y = \vec{\nabla} E_y \cdot \vec{d} \\ \Delta E_z = \vec{\nabla} E_z \cdot \vec{d} \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \Delta \vec{E} = (\vec{d} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

نیروی خالص وارد شده بر دوقطبی در حضور میدان **غیر یکنواخت**:

$$\vec{F} = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

می‌توان گشتاور نیروی کل وارد شده بر دوقطبی را محاسبه کرد:

$$\vec{N} = \underbrace{\vec{P} \times \vec{E}}_{\text{ناشی از وجود دوقطبی}} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\text{ناشی از میدان غیریکنواخت}}$$

ناشی از میدان غیریکنواخت ناشی از وجود دوقطبی

تا اینجا تأثیرات اعمال میدان خارجی را روی یک اتم یا مولکول بررسی کردیم. در بخش بعد این تأثیرات را روی ماده که شامل تعداد زیادی اتم و مولکول است بررسی خواهیم کرد.

ماده در مجاورت میدان خارجی الکتریکی

اگر میدان خارجی به ماده دی‌الکتریک دارای مولکول‌های خنثی یا قطبیده اعمال شود، در نهایت تعداد زیادی دوقطبی کوچک در امتداد میدان باعث قطبیده شدن دی‌الکتریک می‌شود.

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{v}$$

تعریف بردار قطبش: گشتاور دوقطبی در واحد حجم

هدف بررسی میدان الکتریکی **ایجاد شده** توسط یک ماده قطبیده با قطبش P است.

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2}$$

پتانسیل دوقطبی

با توجه به تعریف بردار قطبش $\vec{p} = \vec{P} d\tau$ می توان پتانسیل دی الکتریک در نقطه مشاهده را به صورت زیر نوشت:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\hat{r} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{r^2} d\tau$$

فاصله دوقطبی تا
نقطه مشاهده

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\hat{r}}{r^2}$$



$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) d\tau$$

انتگرال گیری جزء به جزء:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau - \int_V \frac{1}{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) d\tau \right)$$

$$V(r) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r} \vec{P} \cdot d\vec{a}}_{\text{عملکرد همانند چگالی بار سطحی}} - \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) d\tau}_{\text{عملکرد همانند چگالی بار حجمی}}$$

عملکرد همانند چگالی
بار سطحی

عملکرد همانند چگالی
بار حجمی

نتیجه می‌شود که اثر قطبش تولید تجمع بار مقید حجمی در داخل دی‌الکتریک و بار مقید سطحی روی سطح دی‌الکتریک است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

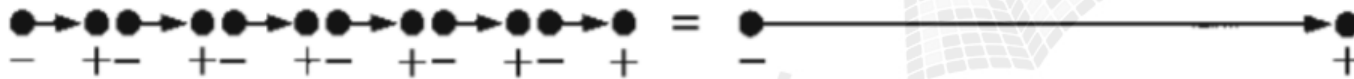
چگالی بار حجمی

$$\sigma_b = \underbrace{\vec{P} \cdot \hat{n}}$$

چگالی بار سطحی

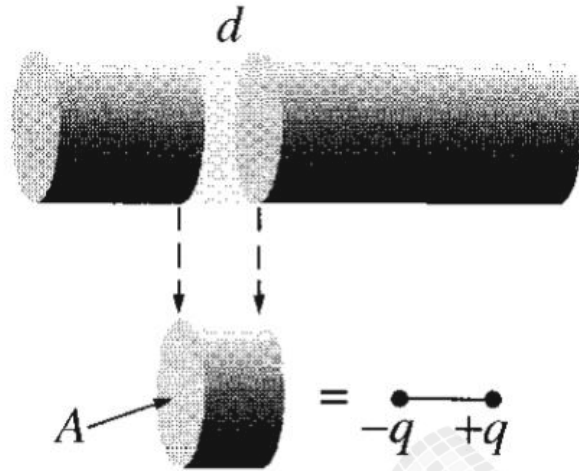
بردار عمود بر سطح

آیا چگالی بار ρ_b و چگالی بار سطحی σ_b واقعاً بار هستند، یا صرفاً تعبیری است که ما از رابطه ریاضی ارائه کردیم؟



بار مقید واقعاً بار است فقط متعلق به اتم است و آزادی جابه جایی آنچنانی ندارد، به طور ساده اگر یک رشته دوقطبی همانند شکل بالا در نظر بگیرید به هر حال سر و ته رشته بار وجود دارد. در حالت خاص **قطبش یکنواخت** بهتر می توان تعبیری که از σ_b ارائه دادیم را فهمید.

تعبیر فیزیکی چگالی بار مقید سطحی



با در نظر گرفتن استوانه‌ای دی‌الکتریک که محور آن در راستای قطبش است می‌توان مقدار بار را در حجم کوچک نشان داده شده به صورت زیر محاسبه کرد:

$$q = P A. \quad \text{بار موجود در حجم کوچک}$$

به این ترتیب چگالی بار سطحی یعنی بار بر واحد سطح برابر با رابطه زیر خواهد بود:

$$\sigma_b = \frac{q}{A} = P.$$

که در توافق کامل با $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ است

جابه جایی الکتریکی و قانون گاوس در حضور دی الکتریک ها

فرض کنید دی الکتریک قطبیده همراه بار آزاد داریم که این بار آزاد می تواند روی سطح رسانا باشد یا یون های آزاد داخل خود دی الکتریک؛ پس چگالی بار کل به صورت زیر است:

$$\rho = \rho_b + \rho_f,$$

پس از قانون گاوس داریم:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_f,$$


$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

با توجه به عبارت بالا می توان بردار جدیدی به نام **جابجایی الکتریکی** تعریف کرد:

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

و صورت دیفرانسیلی قانون گاوس را به صورت زیر داشت:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$$

به همین ترتیب صورت انتگرالی قانون گاوس را به صورت زیر خواهد بود:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{enc}$$

توجه کنید که فعلا در این مرحله هیچ ارتباطی بین میدان الکتریکی دی‌الکتریک و قطبش برقرار نکردیم. در حالت کلی D برداری است که از E و P ساخته می‌شود. بردار D از طریق انتگرال گاوس و با آگاهی از بار آزاد داخل سطح بسته گاوسی محاسبه می‌شود اما برای اطلاع یافتن از میدان E حتما باید قطبش P را بشناسیم و بدانیم.

نکته: هنوز هم رابطه $\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \vec{r}$ برقرار است و توجه به این نکته ضروری است که در رابطه چگالی بار کل (شامل بار مقید و آزاد) وجود دارد در حالیکه دیورژانس $\mathbf{D}$ فقط به چگالی بار آزاد بستگی داشت. البته تفاوت بین $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ بنیادی تر است. چیزی به صورت قانون کولن برای $\mathbf{D}$ وجود ندارد! به عبارت دقیق تر برای یافتن میدان برداری $\mathbf{D}$ لازم است علاوه بر دیورژانس کرل آن را هم بدانیم.

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \epsilon_0 (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{\text{در الکترواستاتیک صفر است}}) + (\vec{\nabla} \times \vec{P}) = \vec{\nabla} \times \vec{P}$$

در الکترواستاتیک صفر است

نتیجه:

دو میدان برداری میدان الکتریکی E و جابجایی الکتریکی D علی‌الاصول با هم متفاوتند و برای D نمی‌توان پتانسیل الکتریکی تعریف کرد. البته شرایط خاصی وجود دارد که در آن کرل P صفر شود و دو میدان مانند هم رفتار کنند.

دی‌الکتریک‌های خطی

در ابتدای فصل اشاره کردیم اثر اعمال میدان خارجی روی **اتم** پیدایش گشتاور دوقطبی اتم است به این صورت که در اثر اعمال میدان مراکز بار مثبت و منفی جابه‌جا می‌شود و جاذبه بین بار مثبت منفی با تاثیر میدان (که دور کردن بار منفی و کشیدن بار مثبت در جهت میدان است) در تعادل قرار می‌گیرد. در این حالت میدان داخلی ناشی از دوقطبی با میدان خارجی در تعادل قرار می‌گیرد و میدان داخلی متناسب **دوقطبی القایی P** خواهد بود. برای دسته‌ای از **مواد** به نام **دی‌الکتریک‌های خطی** نیز **قطبش P** نیز با میدان **E** کل که شامل بار آزاد و آثار قطبش است) متناسب است.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$



پذیرفتاری الکتریکی

بنابراین در محیط‌های خطی رابطه زیر برقرار است:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$



$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$



گذردهی الکتریکی یا ثابت دی الکتریک



$$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e$$

گذردهی نسبی

سوال: آیا در دی‌الکتریک‌های خطی میدان الکتریکی E و جابجایی الکتریکی D همه جا همانند هم رفتار می‌کنند؟

توجه داشته باشید که در مرز جدایی دو ماده دی‌الکتریک به دلیل آنکه انتگرال خطی P روی مسیر بسته که مرز را دربر گرفته الزاماً صفر نیست پس کرل D نمی‌تواند صفر باشد در حالیکه کرل E همه جا صفر است. به عنوان مثال یک طرف مرز ماده دی‌الکتریک است و P وجود دارد که ممکن است یکنواخت هم نباشد از طرف دیگر آن سوی مرز مثلاً خلاء است و ماده ای نیست و P وجود ندارد.

اگر فضا از دی‌الکتریک **خطی** و **همگن** (از یک نوع) پر شده باشد، آنگاه همه جا $\vec{V} \times \vec{D} = 0$ و $\vec{V} \cdot \vec{D} = \rho_f$ است و جابجایی الکتریکی را از روی ρ_f می‌توان محاسبه نمود.

به عنوان مثال بار آزاد q در یک دی‌الکتریک **بزرگ** را در نظر بگیرید. محیط دی‌الکتریک همگن و خطی است و از مرزها دور هستیم (دی‌الکتریک بزرگ است). بنابراین

$\vec{V} \times \vec{D} = 0$ همه جا برقرار است و می‌توان میدان الکتریکی را از روی صورت انتگرالی

قانون گاوس در محیط دی‌الکتریک به راحتی محاسبه کرد:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

شرایط مرزی در دی‌الکتریک‌ها

یکی از مهم‌ترین بخش‌های این فصل حل مساله‌های مقدار مرزی در حضور دی‌الکتریک‌ها است. برای این منظور ابتدا باید از شرایط مرزی در سطح جدایی دو محیط دی‌الکتریک آگاه باشیم. شرایط مرزی الکترواستاتیک برای مولفه‌های D در سطح جدایی مشابه فصل قبل و به صورت زیر است:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{\text{above}}^{\perp} - D_{\text{below}}^{\perp} = \sigma_f, \\ \mathbf{D}_{\text{above}}^{\parallel} - \mathbf{D}_{\text{below}}^{\parallel} = \mathbf{P}_{\text{above}}^{\parallel} - \mathbf{P}_{\text{below}}^{\parallel}. \end{array} \right.$$

در دی‌الکتریک‌های خطی و همگن که کرل D صفر است متد حل همان روش مربوط به فصل سوم است (عموماً حل لاپلاس به روش جداسازی)، همچنین در این حالت چگالی بار مقید و بار آزاد با هم متناسب‌اند

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon} \vec{D} \right) = -\left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_f$$

پس اگر در دی‌الکتریک بار آزاد وجود نداشته باشد، چگالی حجمی بار مقید و در نتیجه چگالی حجمی بار کل صفر خواهد بود و معادله لاپلاس حاکم می‌شود.

در این حالت استفاده از شرایط مرزی به صورت زیر سودمند خواهد بود

$$\epsilon_{\text{above}} E_{\text{above}}^{\perp} - \epsilon_{\text{below}} E_{\text{below}}^{\perp} = \sigma_f$$

$$\epsilon_{\text{above}} \frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \epsilon_{\text{below}} \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} = -\sigma_f$$

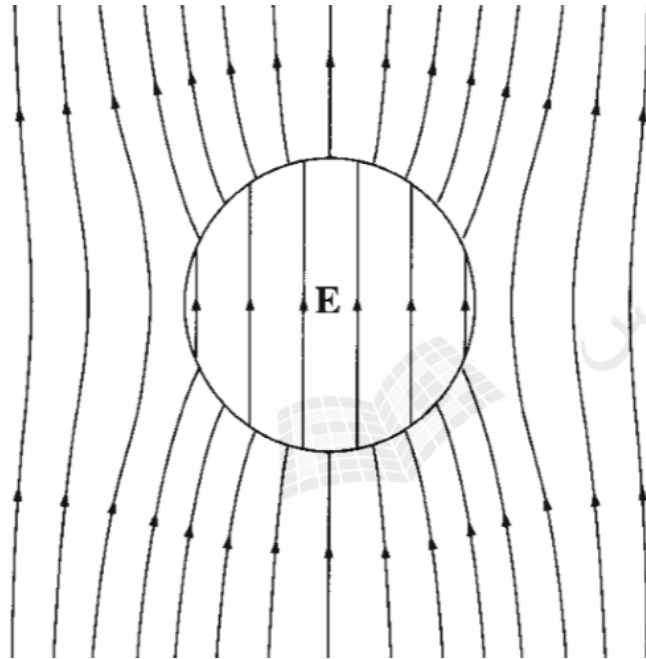
$$\mathbf{D}_{\text{above}}^{\parallel} - \mathbf{D}_{\text{below}}^{\parallel} = \mathbf{P}_{\text{above}}^{\parallel} - \mathbf{P}_{\text{below}}^{\parallel}.$$

$$\mathbf{D}_{\text{above}}^{\parallel} - \mathbf{P}_{\text{above}}^{\parallel} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{above}}^{\parallel}$$



$$V_{\text{above}} = V_{\text{below}}.$$

مثال



کره‌ای از یک ماده دی‌الکتریک خطی را در یک میدان در آغاز یکنواخت $\vec{E}_0$ قرار دادیم. میدان جدید کره را به دست بیاورید.

شرایط مرزی
مساله

i. $V_{in} = V_{out}$, at $r = R$

ii. $\epsilon \frac{\partial V_{in}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial V_{out}}{\partial r}$, at $r = R$

iii. $V_{out} \rightarrow -E_0 r \cos \theta$, for $r \gg R$

چون بار آزاد نداریم جمله پتانسیل کولنی نخواهیم داشت

$$V_{\text{in}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

$$V_{\text{out}}(r, \theta) = \underbrace{-E_0 r \cos \theta}_{\text{ناشی از شرط مرزی سوم}} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

ناشی از شرط مرزی سوم

اعمال شرط مرزی اول

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = -E_0 R \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

$$A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}} \quad \text{for } l \neq 1$$

$$A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2}$$

چون B_0 مربوط به پتانسیل
کولنی بار آزاد است این جمله را
نداریم و این ضریب صفر است.

اعمال شرط مرزی دوم

$$\epsilon_r \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -E_0 \cos \theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta)$$


$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_r l A_l R^{l-1} = -\frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} \quad \text{for } l \neq 1 \\ \epsilon_r A_1 = -E_0 - \frac{2B_1}{R^3} \end{array} \right.$$

در نهایت داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_l = B_l = 0 \quad \text{for } l \neq 1 \\ A_1 = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \quad B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0 \end{array} \right.$$

$$V_{\text{in}}(r, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z$$

میدان داخلی الکتریک $\vec{E} = \frac{3\vec{E}_0}{\epsilon_r + 2}$

انرژی در دی‌الکتریک‌ها

فرض کنید ماده‌ای دی‌الکتریک در محلی ثابت داریم و هر دفعه اندکی بار آزاد اضافه می‌کنیم. هدفمان محاسبه کار انجام شده روی بار آزاد افزوده است

$$\Delta W = \int (\Delta \rho_f) V d\tau$$

می‌توان بار آزاد را به کمک دیورژانس به بردار جابجایی ربط داد:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$$

چون دیورژانس عملگری خطی است دلتا از دیورژانس رد می شود:

$$\Delta \rho_f = \vec{\nabla} \cdot (\Delta \vec{D})$$

$$\rightarrow \Delta W = \int [\vec{\nabla} \cdot (\Delta \vec{D})] V d\tau$$

انتگرال گیری جزء به جزء

$$\vec{\nabla} \cdot [(\Delta \vec{D}) V] = [\vec{\nabla} \cdot (\Delta \vec{D})] V + \Delta \vec{D} \cdot \vec{\nabla} V$$

$$\Delta W = \underbrace{\int \vec{\nabla} \cdot [(\Delta \vec{D})V] d\tau}_{\text{طبق قضیه دیورژانس این جمله روی سطح می رود و صفر می شود}} + \int \Delta \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

طبق قضیه دیورژانس این جمله روی سطح می رود و صفر می شود



$$\Delta W = \int \Delta \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

کار انجام شده برای افزودن بار $\Delta \rho_f$ در حضور دی الکتریک

در صورتی که دی الکتریک خطی باشد خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} \Delta(\vec{D} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \Delta(\epsilon E^2) = \epsilon(\Delta \vec{E}) \cdot \vec{E} = (\Delta \vec{D}) \cdot \vec{E}$$

$$\Delta W = \Delta\left(\frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\tau\right)$$



کل کار انجام شده برای جمع آوری
توزیع بار از صفر تا حالت نهایی

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

این اسلایدها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس
«آموزش الکترومغناطیس ۱ (Electromagnetics)»
تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

faradars.org/fvphy110